Höhere Analysis

Differentialgleichungen

2. Ordnung

Riesige Aufgabensammlung

45 Lösungen

Stand 20. Dezember 2024

Datei Nr. 53020

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

A1:	$y''+y'-20y=0$	$y(x)=k_1e^{4x}+k_2e^{-5x}$
A2:	$y''-12y'-36y=0$	$y(x)=(k_1+k_2x)e^{6x}$
A3:	$4y''+4y'-3y=0$	$y(x)=k_1e^{\frac{1}{2}x}+k_2e^{-\frac{3}{2}x}$
A4:	$y''+4y'+5y=0$	$y(x)=e^{-2x}\cdot(k_1\cos(x)+k_2\sin(x))$
A5:	$y''+6y'+9y=0$	$y(x)=(C_1+C_2x)\cdot e^{-3x}$
A6:	$y''-4y'+12y=0$	$y(x)=e^{2x}\cdot\left(k_1\cos\left(x\sqrt{8}\right)+k_2\sin\left(x\sqrt{8}\right)\right)$

A10	$y''=2x-5$	$y(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x+C_1x+C_2$	
A11:	$y''-6y'+8y=24$	$y(x)=k_1e^{2x}+k_2e^{4x}+3$	
A12:	$y''+7y'+10y=15$	$y(x)=k_1e^{-2x}+k_2e^{-5x}+\frac{3}{2}$	
A13	$y''-4y'=8$	$y(x)=y_O(x)=k_1e^{-4x}-\frac{3}{2}x+k_4$	*Sonderfall*
A14:	$y''-6y'+8y=16x+4$	$y(x)=k_1e^{4x}+k_2e^{2x}+2x+2$	
A15:	$y''+7y'+10y=10x-8$	$y(x)=k_1e^{-2x}+k_2e^{-5x}+x-\frac{3}{2}$	

A16:	$y''-6y'+8y=40x^2-20x+4$	$y(x)=k_1e^{2x}+k_2e^{4x}+5x^2+5x+3$
A17:	$y''+7y'+10y=10x^2+4x+5$	$y(x)=k_1e^{-2x}+k_2e^{-5x}+x^2-x+1$
A18	$y''-4y=4x^2-4$	$y(x)=k_1e^{2x}+k_2e^{-2x}-x^2+\frac{1}{2}$
A19	$y''+12y'+36y=18x^2+6x-3$	$y(x)=(k_1+k_2x)e^{-6x}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{18}$
A20	$y''+3y'=27x^2$	$y(x)=k_1e^{-3x}+3x^3-3x^2+2x+k_4$

A21:	$y''-3y'-10y=6e^{4x}$	$y(x)=k_1e^{5x}+k_2e^{-2x}-\frac{1}{2}e^{4x}$
A22	$y''+y'-6y=2e^{x}$	$y(x)=k_1e^{2x}+k_2e^{-3x}-\frac{1}{2}e^{x}$
A23:	$y''+2y'-24y=6e^{4x}$	$y(x)=k_1e^{-6x}+k_2e^{4x}+\frac{3}{5}xe^{4x}$
A24:	$y''+8y'+15y=30\cdot e^{-3x}$	$y(x)=k_1e^{-5x}+k_2e^{-3x}+15x\cdot e^{-3x}$
A25:	$y''-8y'+16y=2e^{4x}$	$y(x)=(k_1+k_2x+x^2)\cdot e^{4x}$
A26:	$y''+6y'+9y=4\cdot e^{-3x}$	$y(x)=(k_1+k_2x+2x^2)e^{-3x}$
A27	$y''+5y'+4y=-4e^{-x}$	$y_0(x)=k_1e^{-x}+k_2e^{-4x}-\frac{4}{3}xe^{-x}$
A28	$y''+4y'+8y=3e^{-3x}$	$y(x)=e^{-2x}\cdot(k_1\cos(2x)+k_2\sin(2x))+\frac{3}{5}\cdot e^{-3x}$
A29	$y''-2y'+y=e^{x}$	$y(x)=(k_1+k_2x)\cdot e^{x}+\frac{1}{2}x^2\cdot e^{x}$

A31: $y''+6y'-16y=20\cdot\cos(4x)$ $y_O(x)=k_1e^{2x}+k_2\cdot e^{-8x}+0{,}3\cdot\sin(4x)+0{,}4\cdot\cos(4x)$

A32: $y''-16y=30\cdot\sin(2x)$ $y(x)=k_1e^{4x}+k_2e^{-4x}-3\cdot\sin(2x)$

A41 $y''-y'-2y=36\sin(3x)\cdot e^{2x}$

A42 $y''+2y'-3y=e^{x}+\sin(x)$

A43 $y''+6y'+9y=e^{3x}\cdot\cosh(x)$

A44 $y''-y=\cos(x)+x$

A45 $y''+y=x+2\cdot\cos(x)$

A46 $y''-3y'+2y=xe^{3x}+1$

A47 $y''-6y'+25y=2\sin(x)-\cos(x)$

Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen:

A51 $y''+4y'+\frac{25}{4}y=25x+16$ mit $y(0)=0$ und $y(\pi)=0$

A52 $y''-y'-2y=2x+1$ mit $y(0)=2$ und $y'(0)=4$

A53 $y''+6y'+10y=50x^2-10x-2$ mit $y'(0)=3$ und $y'(0)$

A54 $y''+3y'-4y=4x^2+22x+1$ mit

A55 $y''-5y'+6y=e^{-2x}$ mit $y(0)=y'(0)=1$

A56 $y''+2y'+5y=e^{3x}$ mit $y(0)=1$ und $y'(0)=0$

A57 $y''+5y'+4y=-4e^{-2x}$ mit $y(0)=0$ und $y'(0)=4$

A58 $y''-6y'+8y=e^{2x}$ mit $y(0)=1$ und $y'(0)=-\frac{3}{2}$

A59 $y''-4y'-5y=\frac{5}{2}e^{4x}$ mit $y(0)=\frac{5}{2}$ und $y'(0)=1$

A60 $y''+u\cdot y'+\left(u-\frac{3}{4}\right)\cdot y=0$

Lösungen

A1:

$$y''+y'-20y=0$$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2+\lambda-20=0$

Parameterlösungen: $\lambda_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\dfrac{-1\pm 9}{2}=\begin{cases}4\\-5\end{cases}$

Basislösungen: $y_1(x)=e^{4x}$ und $y_2(x)=e^{-5x}$

Allgemeine Lösung: $y(x)=k_1e^{4x}+k_2e^{-5x}$

A2:

$$y''-12y'+36y=0$$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2-12\lambda+36=0$

Parameterlösungen: $\lambda_{1,2}=\dfrac{12\pm\sqrt{144-4\cdot 36}}{2}=\dfrac{12\pm\sqrt{0}}{2}=6$

Da die char. Gleichung nur eine Lösung hat, lautet die allgemeine Lösung:

$$y(x)=(k_1+k_2x)e^{6x}$$

A3:

$$4y''+4y'-3y=0$$

Charakteristische Gleichung: $4\lambda^2+4\lambda-3=0$

Parameterlösungen: $\lambda_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+48}}{8}=\dfrac{-4\pm 8}{8}=\begin{cases}\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\end{cases}$

Basislösungen: $y_1(x)=e^{\frac{1}{2}x}$ und $y_2(x)=e^{-\frac{3}{2}x}$

Allgemeine Lösung: $y(x)=k_1e^{\frac{1}{2}x}+k_2e^{-\frac{3}{2}x}$

A4:

$$y''+4y'+5y=0$$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2+4\lambda+5=0$

Parameterlösungen: $\lambda_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{-4\pm 2i}{2}=-2\pm i$

Ausführliche Lösung: $y_1(x)=k_1\cdot e^{(-2+i)x}=k_1\cdot e^{-2x}\cdot e^{ix}=k_1\cdot e^{-2x}\cdot(\cos(x)+i\cdot\sin(x))$

$y_2(x)=k_2\cdot e^{(-2-i)x}=k_2\cdot e^{-2x}\cdot e^{-ix}=k_2\cdot e^{-2x}\cdot(\cos(x)+i\cdot\sin(-x))$

und wegen sin(-x) = -sin(x): $y_2(x)=k_2\cdot e^{-2x}\cdot(\cos(x)-i\cdot\sin(x))$

Die Basislösungen sind $y_1(x)=e^{-2x}\cdot\cos(x)$ und $y_2(x)=e^{-2x}\cdot\sin(x)$

Die allgemeine Lösung ist eine beliebige Linearkombination davon:

Für die Kurzlösung reicht $y(x)=k_1\cdot e^{-2x}\cdot\cos(x)+k_2\cdot e^{-2x}\cdot\sin(x)$

bzw. $y(x)=e^{-2x}(k_1\cdot\cos(x)+k_2\cdot\sin(x))$

A5:

$$y''+6y'+9y=0$$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2+6\lambda+9=0$

Parameterlösungen: $\lambda_{1,2}=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-36}}{2}=-3$ Doppelte Lösung.

Eine Lösung ist sicher $y_O(x)=k\cdot e^{-3x}$

Herleitung der Gesamtlösung mit der **Methode „Variation der Konstanten“**.

Dabei verwendet man den Ansatz: $y_O(x)=k(x)\cdot e^{-3x}$.

Ableitungen:

$$y_O'(x)=k'(x)\cdot e^{-3x}+k(x)\cdot(-3)e^{-3x}=\left(k'(x)-3\cdot k(x)\right)\cdot e^{-3x}$$

$$y_o''(x)=\left(k''(x)-3\cdot k'(x)\right)\cdot e^{-3x}+\left(k'(x)-3\cdot k(x)\right)\cdot(-3)e^{-3x}$$

$$y_o''(x)=\left[k''(x)-3\cdot k'(x)-3k'(x)+9\cdot k(x)\right]e^{-3x}$$

$$y_o''(x)=\left[k''(x)-6k'(x)+9\cdot k(x)\right]e^{-3x}$$

Man setzt alles in die DGL ein und dividiert durch e^{-3x}:

$$\left[k''(x)-\cancel{6k'(x)}+\cancel{9\cdot k(x)}\right]+\cancel{\mathbf{6}\cdot k'(x)}-\cancel{18\cdot k(x)}+\cancel{\mathbf{9}\cdot k(x)}=0$$

Es bleibt: $k''(x)=0$

Erste Integration: $k'(x)=C_1$

Zweite Integration: $k(x)=C_1x+C_2$

Allgemeine Lösung daher $y(x)=(C_1+C_2x)\cdot e^{-3x}$

A6:

$$y''-4y'+12y=0$$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2-4\lambda+12=0$

Parameterlösungen: $\lambda_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-48}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{-32}}{2}=\dfrac{4\pm2\sqrt{-8}}{2}=2\pm\sqrt{8}\cdot i$

Ausführliche Lösung: $y_1(x)=k_1\cdot e^{\left(2+\sqrt{8}\cdot i\right)x}=k_1\cdot e^{2x}\cdot e^{i\cdot\sqrt{8}x}=k_1\cdot e^{2x}\cdot\left(\cos\left(\sqrt{8}x\right)+i\cdot\sin\left(\sqrt{8}x\right)\right)$

$$y_2(x)=k_2\cdot e^{\left(2-i\sqrt{8}\right)x}=k_2\cdot e^{2x}\cdot e^{-i\sqrt{8}x}=k_2\cdot e^{2x}\cdot\left(\cos\left(\sqrt{8}x\right)+i\cdot\sin\left(-\sqrt{8}x\right)\right)$$

und wegen sin(-x) = -sin(x): $y_2(x)=k_2\cdot e^{2x}\cdot\left(\cos\left(\sqrt{8}x\right)-i\cdot\sin\left(\sqrt{8}x\right)\right)$

Die Basislösungen sind $y_1(x)=e^{2x}\cdot\cos\left(\sqrt{8}x\right)$ und $y_2(x)=e^{2x}\cdot\sin\left(\sqrt{8}x\right)$

Die allgemeine Lösung ist eine beliebige Linearkombination davon:

$$y(x)=k_1\cdot e^{2x}\cdot\cos\left(\sqrt{8}x\right)+k_2\cdot e^{2x}\cdot\sin\left(\sqrt{8}x\right)$$

bzw. $y(x)=e^{2x}\left(k_1\cdot\cos\left(\sqrt{8}x\right)+k_2\cdot\sin\left(\sqrt{8}x\right)\right)$

A10: Gegeben die inhomogene DGL $y'' = 2x - 5$

Da y‘ und y fehlen, kann man zweimal direkt integrieren:

$$y'(x) = \int y''\cdot dx = \int (2x-5)\,dx = x^2 - 5x + C_1$$

$$y(x) = \int y'(x)\,dx = \int \left(x^2 - 5x + C_1\right)dx = \ldots$$

$$y(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x + C_1 x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

A11: Gegeben die inhomogene DGL $y''-6y'+8y=24$

Zuerst löst man die homogene DGL: $y''-6y'+8y=0$

Sie hat die charakteristische Gleichung: $\lambda^2-6\lambda+8=0$

mit den Lösungen: $\lambda_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm2}{2}=\begin{cases}4\\2\end{cases}$

Es gibt also die Basislösungen: $y_1(x)=e^{4x}$ und $y_2(x)=e^{2x}$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL: $y_O(x)=k_1e^{4x}+k_2e^{2x}$

Partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung:

Ansatz weil Grad(g) = 0: $y_P(x)=C$

Ableitungen: $y_P'(x)=0$ und $y_P''(x)=0$

In die DGL: $0+0+8C=24 \quad\Rightarrow\quad C=3$

$y_P(x)=3$

Allgemeine Lösung der inhomogene DGL: $y(x)=y_O(x)+y_P(x)$

Ergebnis: $y(x)=k_1e^{4x}+k_2e^{2x}+3$

A12: Gegeben die inhomogene DGL $y''+7y'+10y=15$

Zuerst löst man die homogene DGL: $y''+7y'+10y=0$

Sie hat die charakteristische Gleichung: $\lambda^2+7\lambda+10=0$

mit den Lösungen: $\lambda_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{-7\pm3}{2}=\begin{cases}-2\\-5\end{cases}$

Es gibt also die Basislösungen: $y_1(x)=e^{-2x}$ und $y_2(x)=e^{-5x}$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL: $y_O(x)=k_1e^{-2x}+k_2e^{-5x}$

Partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung:

Ansatz weil Grad(g) = 0: $y_P(x)=C$

Ableitungen: $y_P'(x)=0$ und $y_P''(x)=0$

In die DGL: $0+0+10C=15 \quad\Rightarrow\quad C=\frac{3}{2}$

$y_P(x)=\frac{3}{2}$

Allgemeine Lösung der inhomogene DGL: $y(x)=y_O(x)+y_P(x)$

Ergebnis: $y(x)=k_1e^{-2x}+k_2e^{-5x}+\frac{3}{2}$

A13:

Gegeben die inhomogene DGL $y''-4y'=8$

Zuerst löst man die homogene DGL: $y''-4y'=0$

Sie hat die charakteristische Gleichung: $\lambda^2-4\lambda=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\lambda-4)=0$

mit den Lösungen: $\lambda_1=0$ und $\lambda_2=4$

Es gibt also die Basislösungen: $y_1(x)=e^{0x}=1$ und $y_2(x)=e^{4x}$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL: $y_O(x)=k_1\cdot 1+k_2\cdot e^{4x}=k_1+k_2e^{4x}$

Partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung:

Da $g(x)=6$ vom Grad 0 ist: $y_p(X)=C$ mit $y_P'(x)=y_P''(x)=0$

Da die DGL kein y enthält, führt das Einsetzen zu 0 = 8.
Man muss dann den Ansatz $y_p(X)=Cx+D$ verwenden.

Ableitungen: $y_P'(x)=C, \quad y_P''(x)=0$

Jetzt führt das Einsetzen in die DGL zu: $0-4C=6 \quad \Rightarrow \quad C=-\frac{3}{2}$

D kommt nicht vor, ist also beliebig: $D=k_3\in\mathbb{R}$

Ergebnis: $y_p(x)=-\frac{3}{2}x+k_3$

Allgemeine Lösung für die inhomogene DGL: $y(x)=y_O(x)+y_P(x)$

Ergebnis: $y(x)=\left[k_1+k_2e^{4x}\right]+\left[-\frac{3}{2}x+k_3\right]$

Fasst man die beiden Konstanten k_1 und k_3 zusammen und nennt sie k_4,

ist die Lösung $y(x)=k_1e^{-4x}-\frac{3}{2}x+k_4$

A14: Gegeben die inhomogene DGL $y''-6y'+8y=16x+4$

Zuerst löst man die homogene DGL: $y''-6y'+8y=0$

Sie hat die charakteristische Gleichung: $\lambda^2-6\lambda+8=0$

mit den Lösungen: $\lambda_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm 2}{2}=\begin{cases}4\\2\end{cases}$

Es gibt also die Basislösungen: $y_1(x)=e^{4x}$ und $y_2(x)=e^{2x}$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL: $y_O(x)=k_1e^{4x}+k_2e^{2x}$

Partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung:

Ansatz weil Grad(g) = 1: $y_P(x)=Cx+D$

Ableitungen: $y_P'(x)=C$ und $y_P''(x)=0$

In die DGL: $0-6C+8(Cx+D)=16x+4$

$-6C+8D+8Cx=16x+4$

Koeffizientenvergleich $\left\{\begin{array}{rl}-6C+8D=4 & (1)\\ 8C=16 & (2)\end{array}\right\}$

Aus (2) folgt C = 2

Aus (1) folgt $8D=4+6C=4+12=16 \quad\Rightarrow\quad D=2$

Partikuläre Lösung: $y_P(x)=2x+2$

Allgemeine Lösung für die inhomogene DGL: $y(x)=y_O(x)+y_P(x)$

Ergebnis: $y(x)=k_1e^{4x}+k_2e^{2x}+2x+2$

Fortsetzung im Original